Cinquième partie:

Gravitation, moment cinétique

Notions abordées:

- 5.1 Moment cinétique
- 5.2 Mouvement à force centrale
- 5.3 Un peu d'histoire et lois de Kepler
- 5.4 Loi de la gravitation universelle de Newton
- 5.5 Champ de gravitation

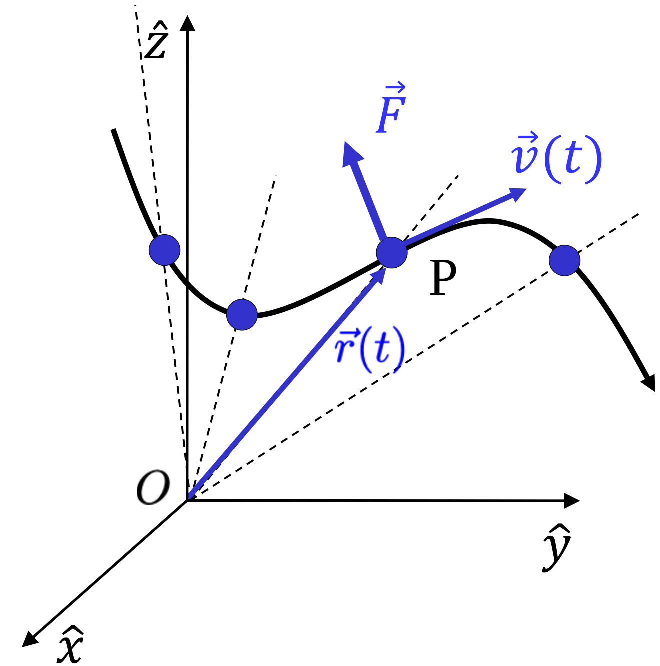
But:

- Utiliser la conservation du moment cinétique
- Identifier les trajectoires

5.1 Moment cinétique et moment d'une force

On définie le vecteur **moment cinétique (ou angulaire) par rapport à l'origine du repère O:**

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OP} \wedge m\vec{v} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$$



On peut définir le moment cinétique par rapport à n'importe quel point A:

$$\vec{L}_A = \overrightarrow{AO} \wedge m\vec{v} + \vec{L}_O$$

$$\vec{L}_A = \overrightarrow{AP} \wedge m\vec{v} = \left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP}\right) \wedge m\vec{v} = \overrightarrow{AO} \wedge m\vec{v} + \overrightarrow{OP} \wedge m\vec{v}$$

On définie le vecteur **moment d'une force $\vec{F}$ appliquée à P par rapport à l'origine du repère O:**

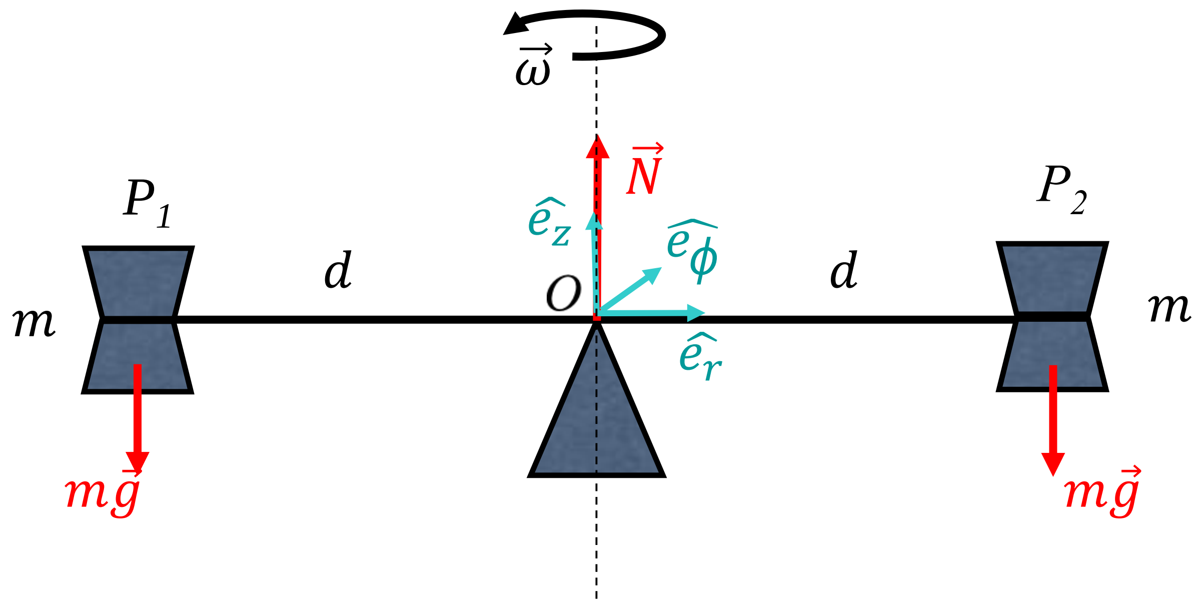
$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F}$$

$$\boxed{\vec{M}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt}}$$

***Théorème du moment cinétique*:**

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d\,\overrightarrow{OP}}{dt} \wedge m\vec{v} + \overrightarrow{OP} \wedge \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{v} \wedge m\vec{v} + \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F} = \vec{M}_O$$

5.1 Ex.: tabouret tournant



$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OP_1} \wedge m\vec{v}_1 + \overrightarrow{OP_2} \wedge m\vec{v}_2$$

$$\vec{v}_2 = -\vec{v}_1 = \omega d \; \hat{e}_\phi$$

$\Rightarrow$ $\vec{L}_O = 2d^2 m\omega \; \hat{e}_z$

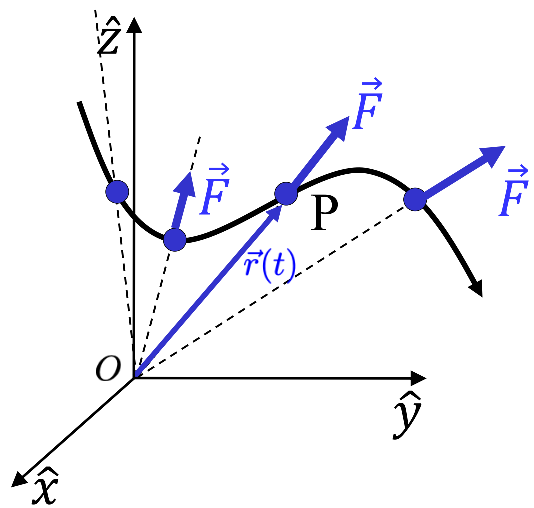
$\Rightarrow$ $d^2\omega = cste$

$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OP_1} \wedge m\vec{g} + \overrightarrow{OP_2} \wedge m\vec{g} = 0$$

$\Rightarrow$ $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = 0$

5.2 Mouvement dans un potentiel central

- Une force $\vec{F}$ est dite **centrale** si elle pointe toujours en direction d'un même point O: $\vec{F}(\vec{r}) \parallel \vec{r}$
- Si une **force centrale $\vec{F}(\vec{r})$ est conservative**, alors **le potentiel** associé ne dépend que de la distance r à l'origine: $\boldsymbol{V(\vec{r}) = V(r)}$ et $\boldsymbol{\vec{F} = -\frac{dV(r)}{dr}\frac{\vec{r}}{r}}$



$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V(\vec{r}) = -\begin{pmatrix} \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x} \\ \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial y} \\ \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial z} \end{pmatrix}; \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x} = \frac{\partial V(r)}{\partial x} = \frac{dV(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{dV(r)}{dr}\frac{\partial\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\partial x} = \frac{dV(r)}{dr}\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{dV(r)}{dr}\frac{x}{r}$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V(\vec{r}) = -\begin{pmatrix} \frac{dV(r)}{dr}\frac{x}{r} \\ \frac{dV(r)}{dr}\frac{y}{r} \\ \frac{dV(r)}{dr}\frac{z}{r} \end{pmatrix} = -\frac{dV(r)}{dr}\frac{1}{r}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{dV(r)}{dr}\frac{1}{r}\vec{r}$$

5.2 Mouvement dans un potentiel central

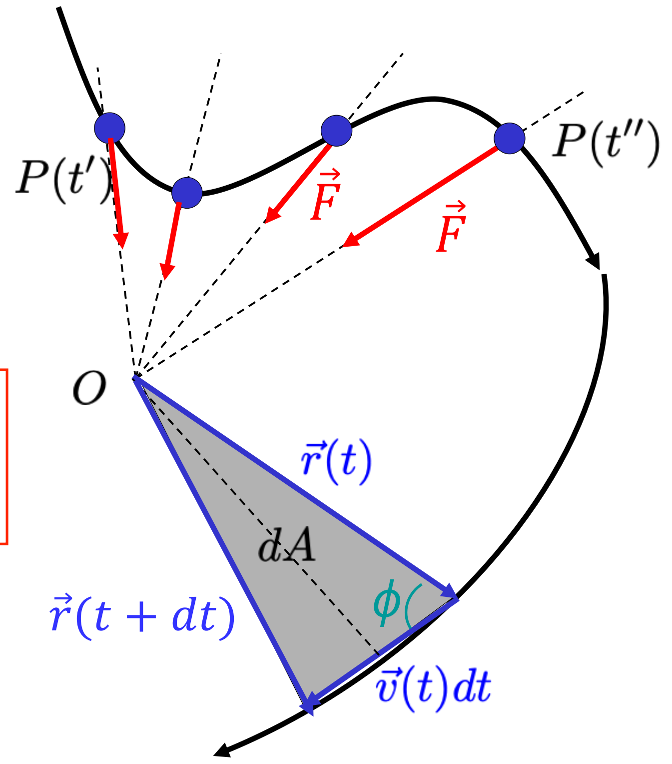
- Potentiel central $\Leftrightarrow$ Force centrale conservative:
- 1) vecteur moment cinétique $\vec{L}_O = \vec{r} \wedge m\vec{v}$ reste **constant** ($\vec{L}_O$ est **conservé**)

$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F} = 0$ ($\overrightarrow{OP} \parallel \vec{F}$)

$\Rightarrow$ mouvement dans le plan $[\vec{r}\ \vec{v}] \perp \vec{L}_O$ ($\vec{L}_O$ ne change jamais de direction)

- 2) **L'aire balayée** par unité de temps par le vecteur $\vec{r}$ **est constante** (Loi des aires)

$$dA = \frac{1}{2} v\, dt\, r \sin\phi \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} |\vec{r} \wedge \vec{v}| = \frac{1}{2} \frac{L_O}{m}$$



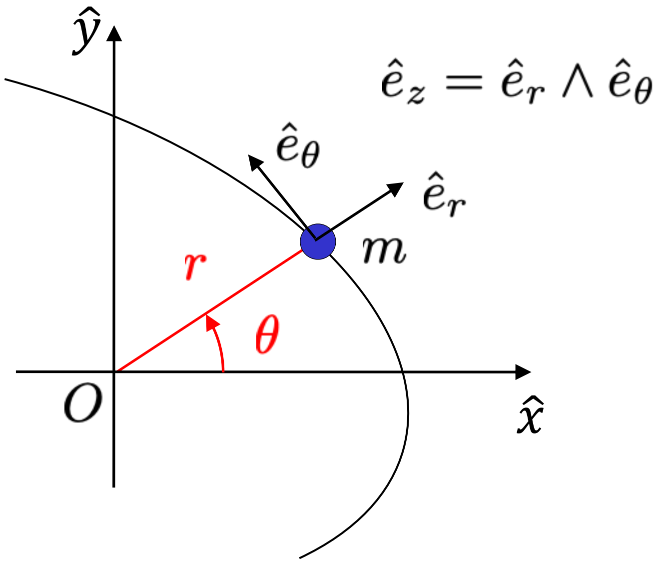
Mouvement central	$\Leftrightarrow$	**Moment cinétique constant**	$\Leftrightarrow$	**Loi des aires + mouvement dans un plan**

par rapport au centre O fixe

démo: mouvement central

5.2 Mouvement dans un potentiel central

- **3) Conservation de l'énergie mécanique:**



Coordonnées cylindriques avec (r, θ) dans le plan du mouvement $\hat{e}_z$ perpendiculaire au plan de mouvement

$$\begin{cases} \vec{r} = r\,\hat{e}_r \\ \vec{v} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta \end{cases}$$

Moment cinétique

$$\vec{L}_O = \vec{r} \wedge m\vec{v} = mr\hat{e}_r \wedge (\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\hat{e}_z$$

Energie mécanique

$$E = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + V(r) = \frac{1}{2}m\,(\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta)^2 + V(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mr^2\dot{\theta}^2}{2} + \mathrm{V(r)} =$$

$$= \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{{L_0}^2}{2mr^2} + V(r)$$

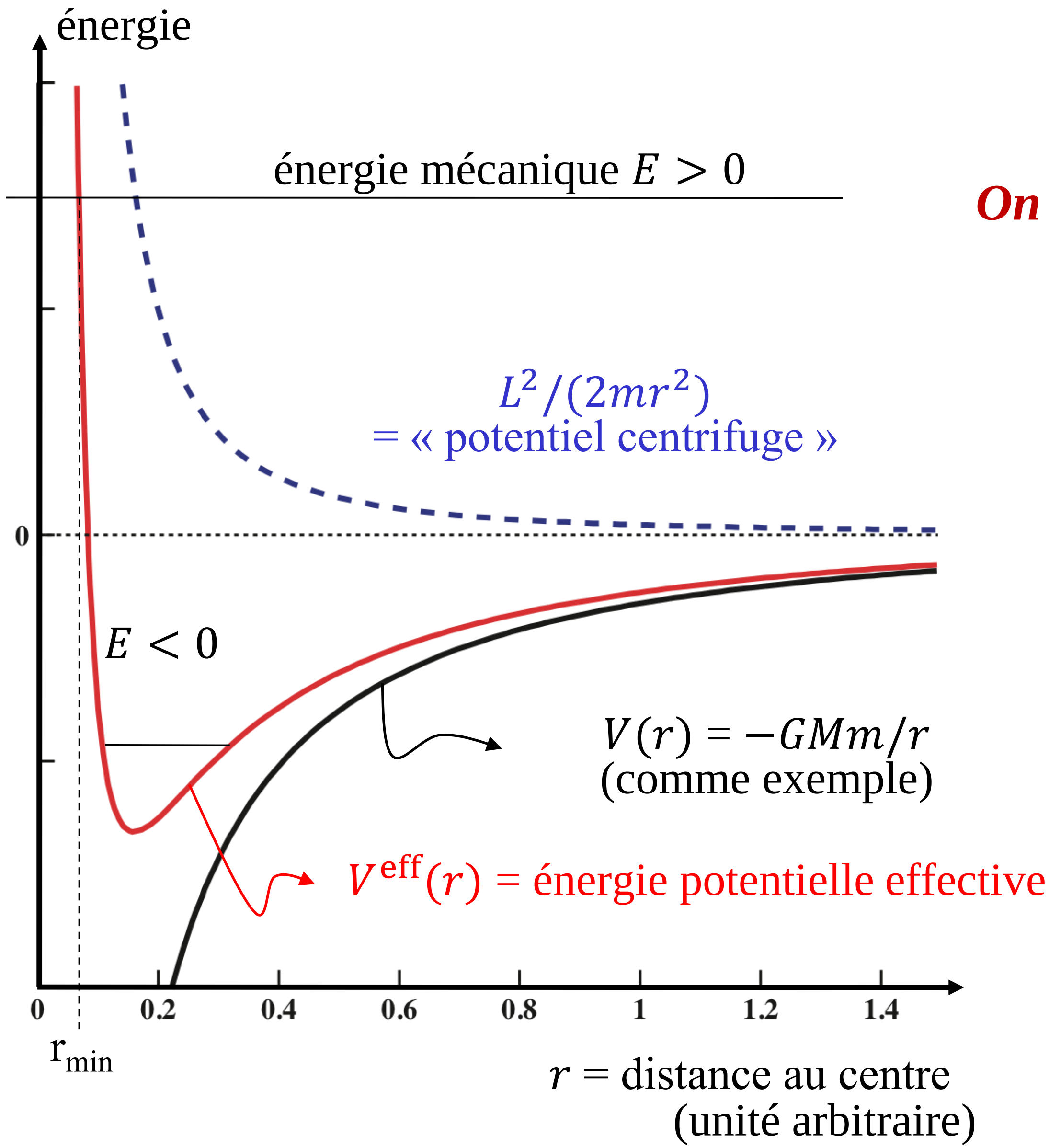
Energie cinétique radiale

Energie cinétique de rotation

$\vec{L}_O$ et E sont conservés $\Leftrightarrow$ $\vec{L}_O$ et E sont des intégrales premières du mouvement

5.2 Mouvement dans un potentiel central

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L_0{}^2}{2mr^2} + V(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + V_{eff}(r)$$



$$V_{eff}(r) = \frac{L_0{}^2}{2mr^2} + V(r)$$

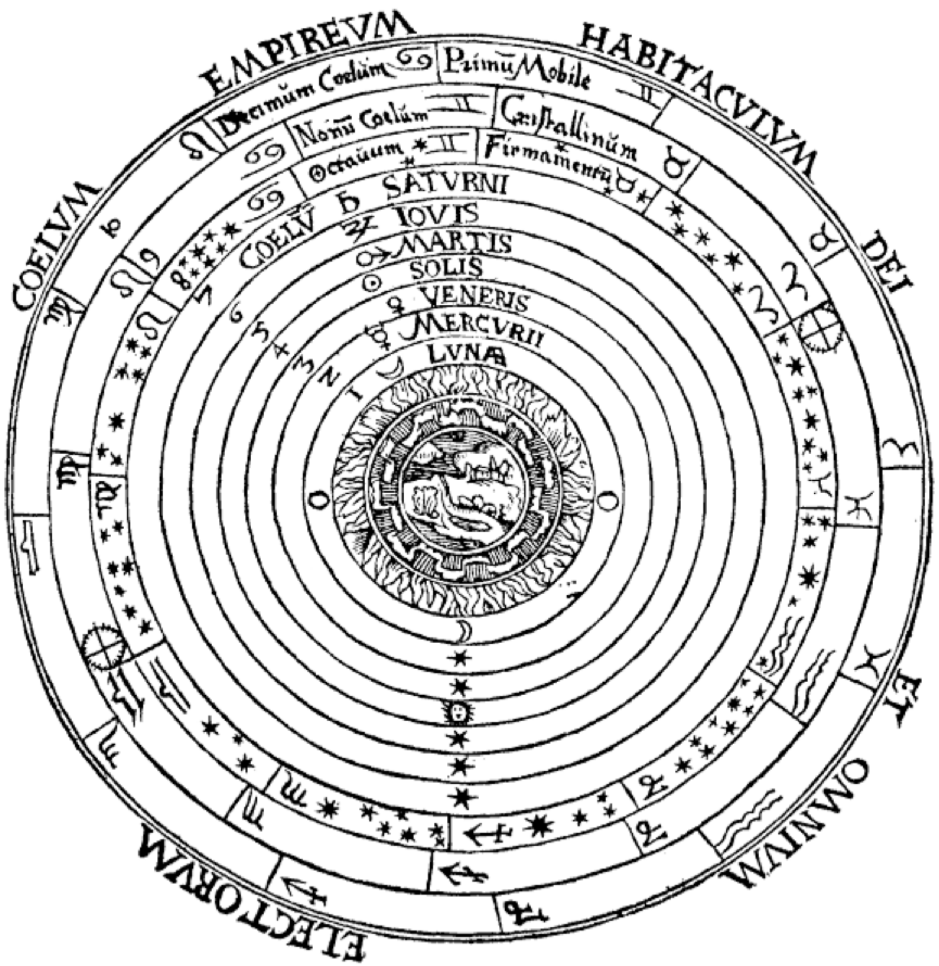
On se ramené à un problème à une dimension !

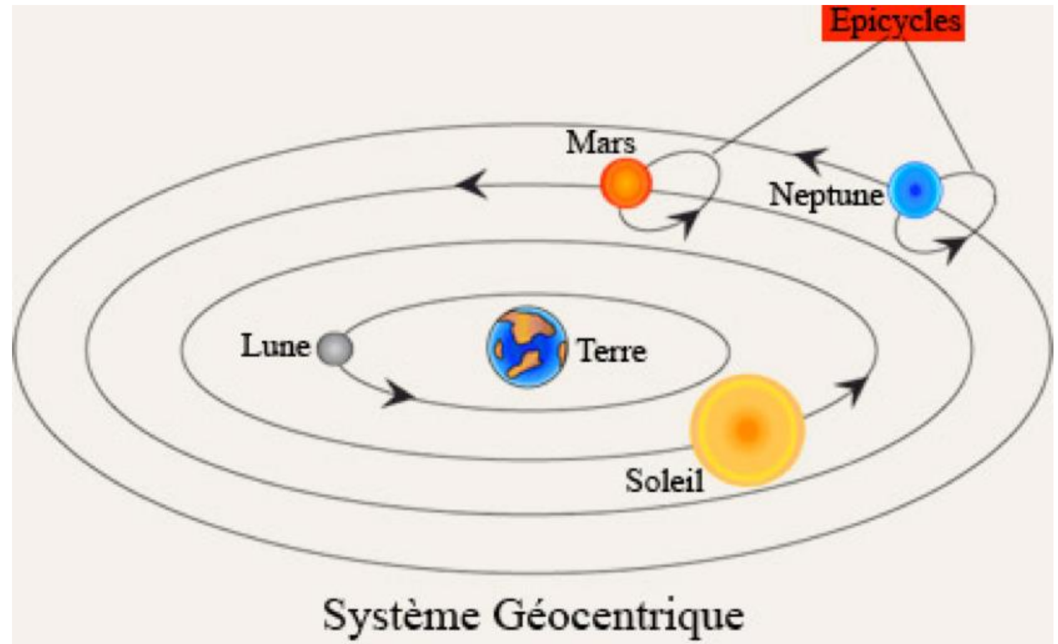
- Exemple:
  - Potentiel gravitationnel :
    $V(r) = -GMm/r$
- Deux type de trajectoires:
  - E < 0 -> état lié
  - E > 0 -> diffusion (r peut aller vers l'infini)
  - Les lois de conservation de L et E ne permettent pas au point matériel de s'approcher trop près du centre de force ($r > r_{\text{min}}$)

démo: https://auditoires-physique.epfl.ch/experiment/112

5.3 Géocentrisme

Schema huius præmissæ diuisionis Sphærarum.





Système Géocentrique

- Terre au centre.
- Soleil à vitesse constante sur un cercle légèrement décentré.
- Planètes à vitesse constante sur des cercles (épicycles) dont les centres sont à vitesse constante sur d'autres cercles (déférents) centrés sur la Terre

5.3 Nicolas Copernic (1473−1543)

- De Revolutionibus Orbium Coelestium (1543)
  - Modèle héliocentrique (inspiré par Aristarque 3eme siècle a.C.)
  - Remet en question la vision géocentrique et le « modèle des deux sphères concentriques » (la sphère terrestre et la sphère des étoiles fixes)

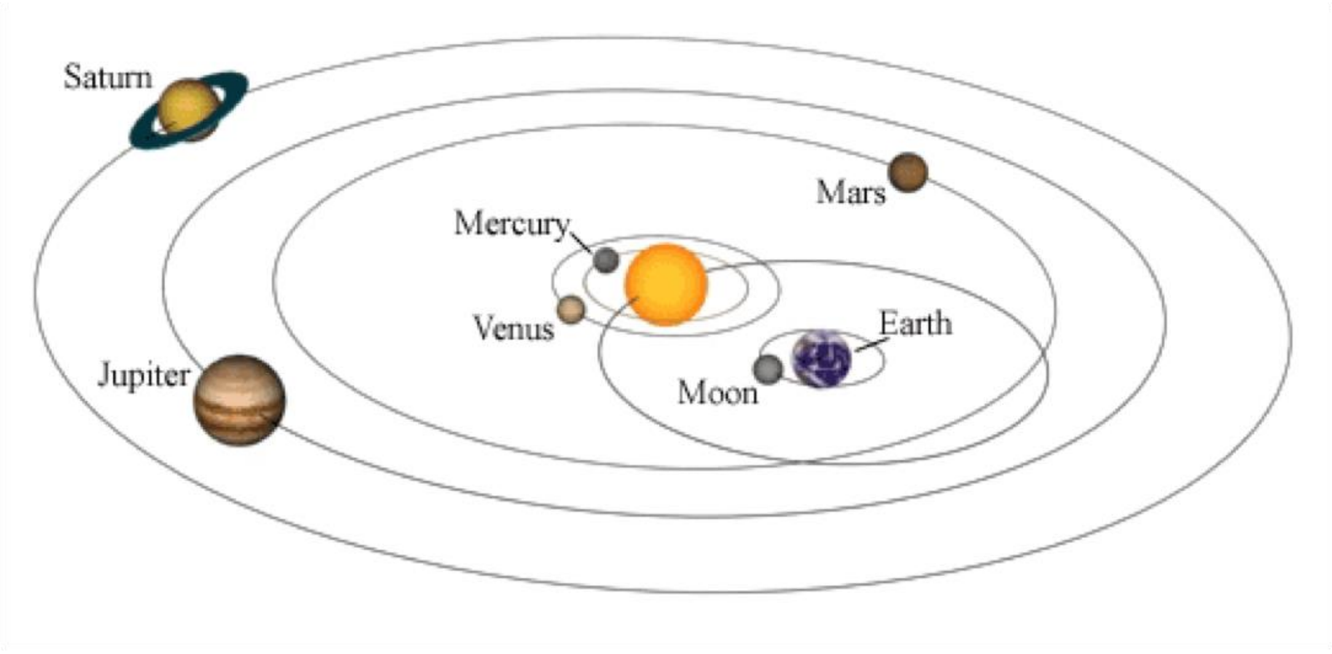
Révolution de pensée:
la Terre (et donc l'humain) n'est plus au centre de l'Univers !

⇒ conflit avec l'Eglise

Qualitativement: explication plus simple du mouvement des planètes par rapport à la Terre et au Soleil… mais toujours des cercles !

5.3 Tycho Brahe (1546–1601)

- Réalise l'importance de faire des mesures précises du mouvement des planètes (approche scientifique)
- Consacre de nombreuses années à l'observation et la mesure des mouvements planétaires
- Tente de réconcilier les points de vue de l'Eglise avec celui de de Copernic (Soleil tourne autour de la Terre immobile et planètes tournent autour du Soleil)



5.3 Lois de Kepler (1571–1630)

- 1ère loi: (1609)
  Les trajectoires des planètes sont des ellipses dont le Soleil occupe l'un des foyers.

- 2ème loi: (lois des aires, 1609)
  Le rayon-vecteur du Soleil à une planète balaie des aires égales en des temps égaux.

- 3ème loi: (1619)
  Les carrés des périodes de révolution T sont proportionnels aux cubes des grands axes a:

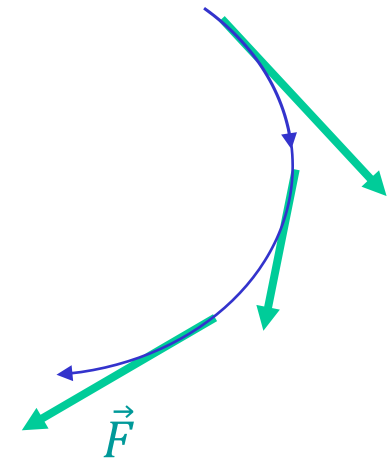
$$\frac{T^2}{a^3} = constante$$

Note:
Déviation très petite par rapport à une trajectoire parfaitement circulaire.
Rapport des axes de l'ellipse:

0.996	pour Mars
0.99986	pour la Terre
0.97	pour Pluton et Saturn

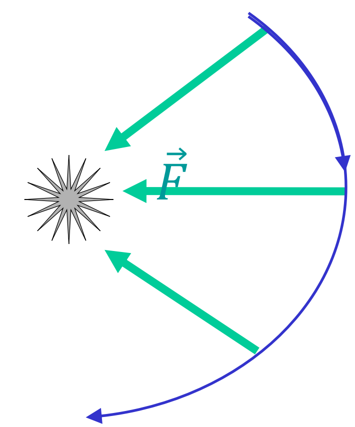
5.4 Galilée (1564–1642), Newton (1642–1727): le développement de la loi de la gravitation

- Qu'est-ce qui fait bouger les planètes ?
  - Avant Galilée/Newton:
    - Le mouvement « naturel » d'un corps est l'immobilité
    - Une planète doit constamment être "poussée" ou "tirée" (par un ange !) dans la direction de son mouvement, autrement elle s'arrête
  - Après Galilée/Newton:
    - Le mouvement « naturel » d'un corps est rectiligne uniforme; une planète dévie de sa ligne droite si une force non tangentielle agit sur elle



- Newton tire les conséquences des lois de Kepler:
  - La loi des aires ($2^{ème}$ loi de Kepler) implique que la force subie par une planète est centrale
    $\Rightarrow$ cette **force centrale attractive** est exercée par le Soleil
  - En utilisant la 3ème loi de Kepler, Newton montre que la force est **proportionnelle à** $1/r^2$ (r =distance Soleil-planète)
  - A partir de là, il prédit une **trajectoire elliptique** ! (1ère loi)

lois de la gravitation universelle $\Leftarrow$



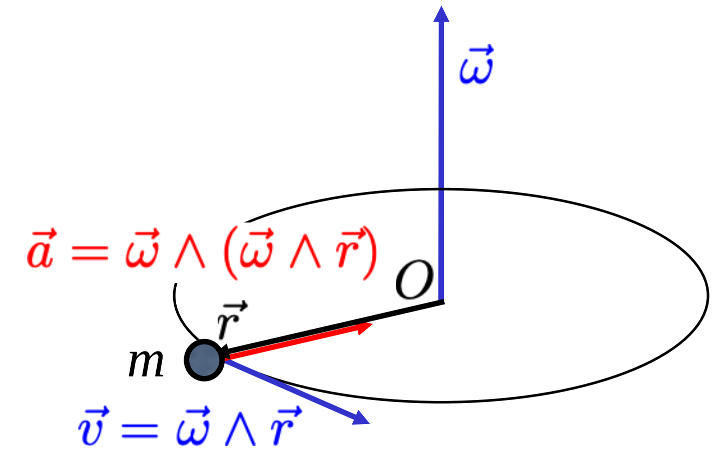
$$F \propto \frac{1}{r^2}$$

5.4 « Découverte » de la force en $1/r^2$

(dans le cas particulier d'une orbite circulaire de rayon r)

- Moment cinétique :

$$\vec{L}_0 = \vec{r} \wedge m\vec{v} = m\vec{r} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = mr^2\vec{\omega}$$



- 2ème loi de Kepler (= loi des aires) :

$$\vec{L}_0 = cste \;\Rightarrow\; \vec{\omega} = cste \;\Rightarrow\; v = \omega r = cste$$

$$\Downarrow$$

mouvement circulaire uniforme:

$$F = ma = m\omega^2 r = m\frac{v^2}{r} = \frac{m}{r}\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2$$

T est la période = le temps nécessaire pour faire un tour

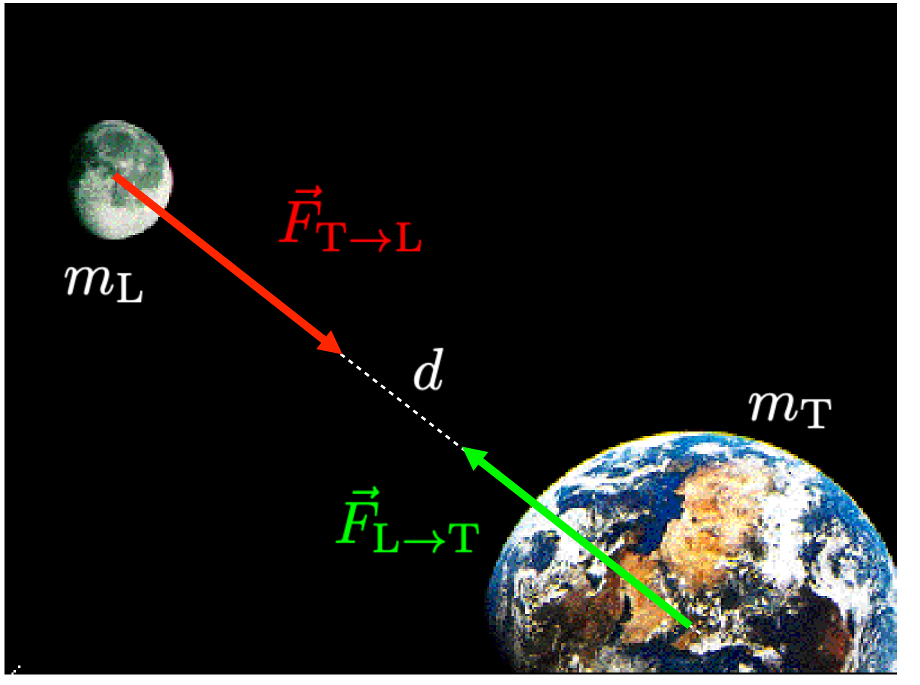
- 3ème loi de Kepler :

$$T^2 = Cr^3$$

$$F = \frac{m}{r}\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 = \frac{m}{r}\frac{(2\pi r)^2}{Cr^3} = \frac{4\pi^2 m}{C}\frac{1}{r^2}$$

5.4 Action et réaction (3ème loi de Newton)

« A chaque action, il y a toujours une réaction égale et opposée; si un corps exerce une force sur un autre, cet autre corps exerce une force de norme égale et de sens opposé sur le premier »



Application aux forces gravitationnelles:
cas du système Terre (T) – Lune (L)

$$\vec{F}_{T\,\to\,L} + \vec{F}_{L\,\to\,T} = 0$$

$$\begin{cases} F_{T\,\to\,L} = \dfrac{4\pi^2 m_L}{C_T}\dfrac{1}{d^2} \\ F_{L\,\to\,T} = \dfrac{4\pi^2 m_T}{C_L}\dfrac{1}{d^2} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{4\pi^2 m_L}{C_T} = \dfrac{4\pi^2 m_T}{C_L} \Rightarrow \dfrac{4\pi^2}{m_T C_T} = \dfrac{4\pi^2}{m_L C_L} = G$$

$$\begin{cases} F_{T\,\to\,L} = \dfrac{4\pi^2 m_L}{C_T}\dfrac{1}{d^2} = \dfrac{4\pi^2 m_L m_T}{m_T C_T}\dfrac{1}{d^2} = \dfrac{G m_L m_T}{d^2} \\ F_{L\,\to\,T} = \dfrac{4\pi^2 m_T}{C_L}\dfrac{1}{d^2} = \dfrac{4\pi^2 m_L m_T}{m_L C_T}\dfrac{1}{d^2} = \dfrac{G m_L m_T}{d^2} \end{cases}$$

G est la constante de gravitation universelle (indépendante du corps)

$G = (6.673 \pm 0.010)\times 10^{-11}\ \mathrm{m}^3\ \mathrm{kg}^{-1}\ \mathrm{s}^{-2}$

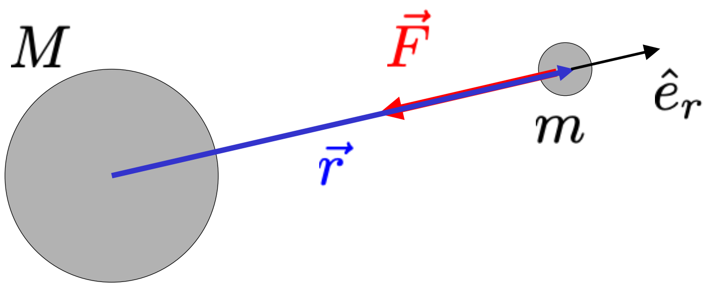
5.4 Loi de la gravitation universelle (Newton)

« Philosophiae Naturalis Principia Mathematica » (1687)

L'interaction de gravitation entre deux corps s'exprime par une force centrale attractive proportionnelle aux masses des deux corps et inversement proportionnelle au carré de leur distance

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\,\hat{e}_r = -G\frac{Mm}{r^3}\vec{r}$$

G = constante de gravitation universelle

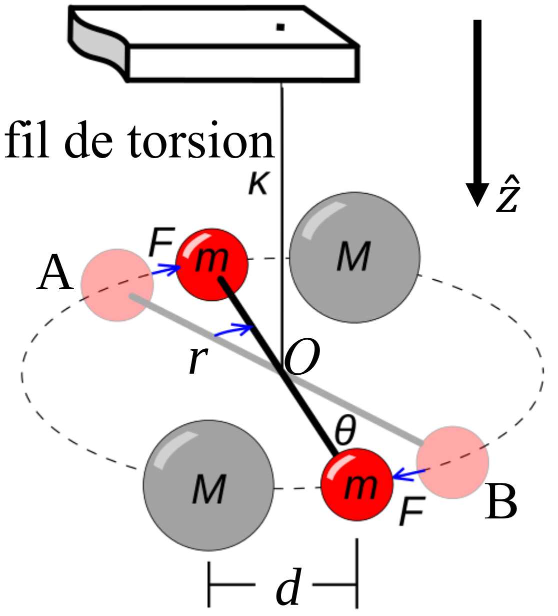


$G = (6.673 \pm 0.010)\times10^{-11}\ \mathrm{m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}}$

démo: balance de Cavendish

démo: balance de Cavendish

5.4 Balance de Cavendish



Théorème du moment cinétique: $\boldsymbol{\vec{M}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt}}$

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OA} \wedge m\vec{v}_A + \overrightarrow{OB} \wedge m\vec{v}_B = 2mrv\hat{z}$$

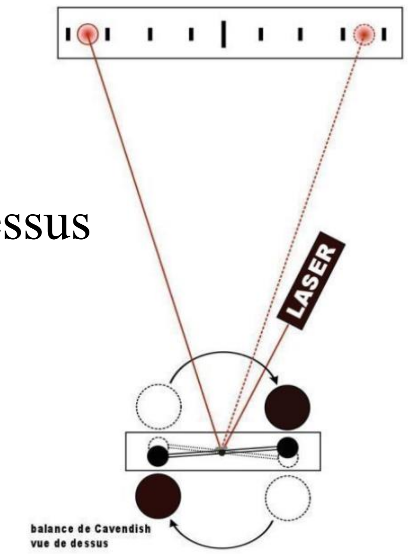
Mouvement circulaire : $v = \omega r = \dot{\theta} r$ ⇒ $\vec{L}_O = 2mr^2\dot{\theta}\hat{z}$

⇓

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = 2mr^2\ddot{\theta}\hat{z}$$

$$\vec{M}_O = \sum \vec{M}_{O,i} = \vec{M}_{tor} + \vec{M}_{frot} + \vec{M}_{grav}$$

Vue de dessus



Couple du fil de torsion: $\vec{M}_{tor} = -k\theta\hat{z}$

Couple d'amortissement visqueux: $\vec{M}_{frot} = -C\dot{\theta}\hat{z}$

Couple forces entre masses: $\vec{M}_{grav} = 2\vec{r} \wedge \vec{F} = 2G\frac{mM}{d^2}r\hat{z}$

$$2mr^2\ddot{\theta} + C\dot{\theta} + k\theta = 2G\frac{mM}{d^2}r$$

Eq. oscillateur amorti: pour $t \to \infty$

$\Rightarrow \quad \dot{\theta} \to 0,\ \ddot{\theta} \to 0 \Rightarrow \theta \to \theta_{fin}$ ⇒ $\theta_{fin} = 2G\frac{mM}{kd^2}r$ ⇒ $G = \theta_{fin}\frac{kd^2}{2mMr}$

5.5 Champ de gravitation

- Une masse ponctuelle M produit un champ gravitationnel $\vec{g}(\vec{r})$ à la position $\vec{r}$:

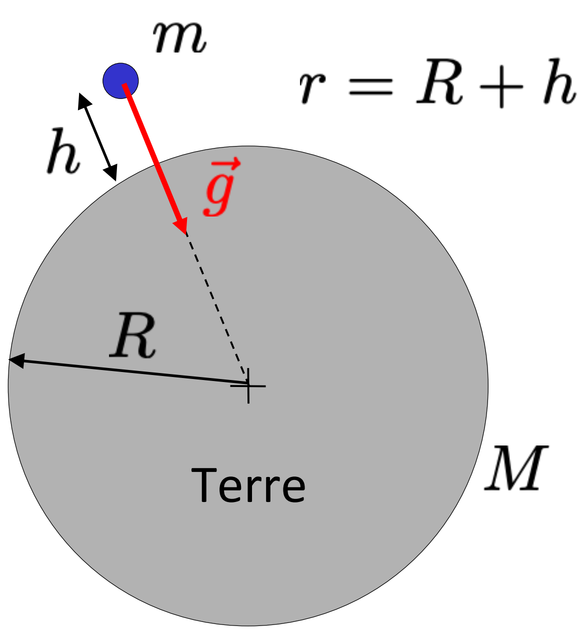
$$\vec{g}(\vec{r}) = -\frac{GM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

Force subie par une masse m à cette position :

$$\vec{F} = m\vec{g}(\vec{r})$$

- Quel est le champ gravitationnel produit par une masse M non ponctuelle supposée sphérique de rayon R et homogène ? (par exemple la Terre)

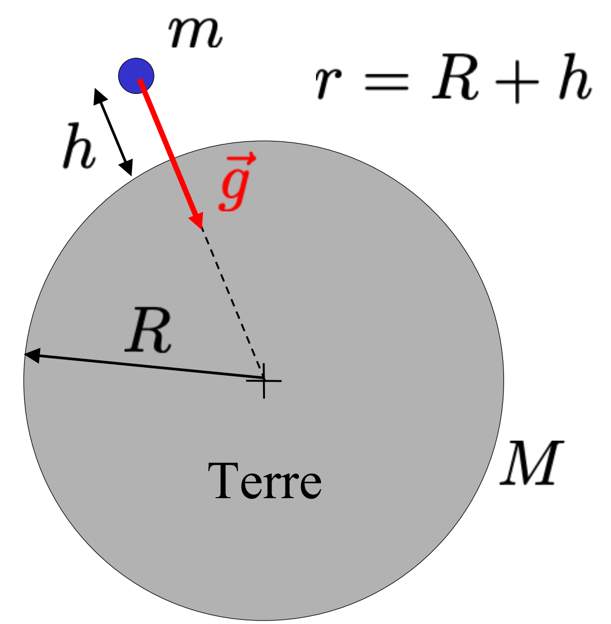
Réponse: si $r \geq R$, le même champ que produirait une masse M ponctuelle située au centre le la Terre (conséquence de la forme en $1/r^2$)



Ex.:
R = 6371 km $\Rightarrow$ $g(R)$ = 9.81 m/s
Everest: h = 8.85 km $\Rightarrow$ $g(R+h)$ = 9.78 m/s

5.5 Energie potentielle gravitationelle

Elle représente le travail que il faut fournir pour amener un point matériel de masse *m* (avec vitesse nulle) de la surface de la Terre à une hauteur *h:*



$$\int_R^r \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_R^r m\vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_R^r -\vec{\nabla}V(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = V(R) - V(r)$$

$$\int_R^r m\vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_R^r -m\frac{GM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{r} = \int_R^r -m\frac{GM}{r^2}dr$$

$$= m\frac{GM}{r}\Big|_R^r = \frac{GMm}{r} - \frac{GMm}{R} = V(R) - V(r)$$

$$V(r) = -\frac{GMm}{r}$$ **Energie potentielle gravitationnelle**

Objet de masse *m* à hauteur *h* par rapport à la surface de la Terre

$$V(r) = -\frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{R} + \frac{GMm}{R^2}h = cste + mgh$$

accélération de gravitée terrestre

$$g = \frac{GM}{R^2} = 9.8 \text{ m/s}^2$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R+h} = \frac{R-h}{R^2-h^2} \cong \frac{R-h}{R^2} = \frac{1}{R} - \frac{h}{R^2}$$

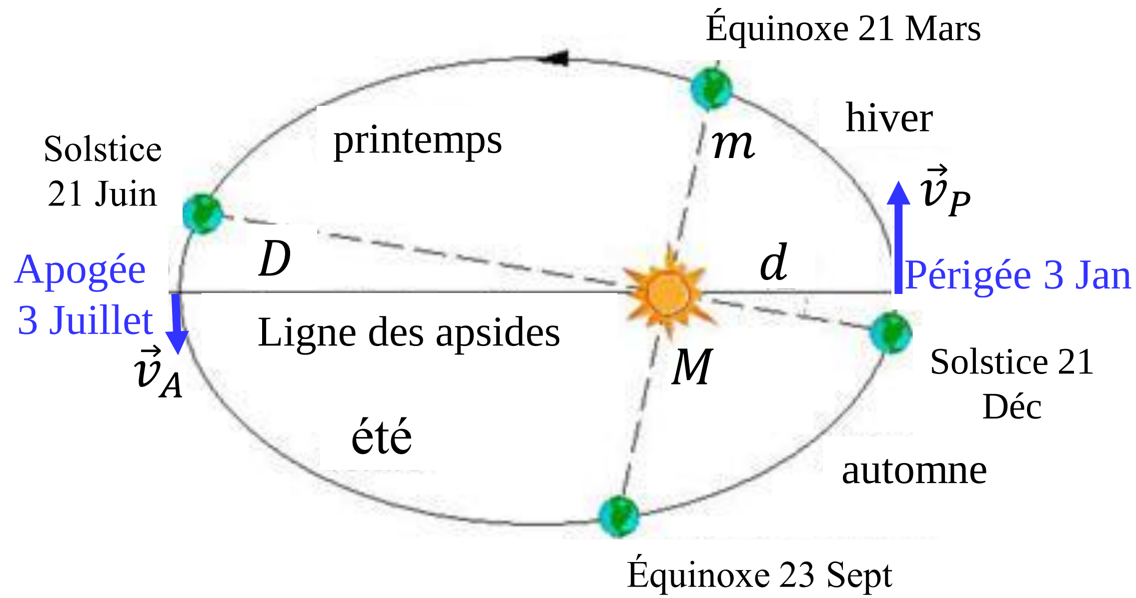
5.5 Ex.: Terre en rotation autour du Soleil

Determination de la masse *M* du Soleil

$$F_{S \to T} = \frac{4\pi^2 Mm}{MC}\frac{1}{r^2} = \frac{GMm}{r^2} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{4\pi^2}{MG}$$

3éme loi de Kepler $T^2 = CD^3 = \frac{4\pi^2}{MG}D^3$

$$M = \frac{4\pi^2}{T^2 G}D^3$$



$$d = 147\ 10^6 km$$

$$D = 152\ 10^6 km$$

Vitesse de la Terre aux apsides

Potentiel central:

1) l'énergie mécanique est conservée

$$-\frac{GMm}{D} + \frac{1}{2}mv_A^2 = -\frac{GMm}{d} + \frac{1}{2}mv_P^2$$

2) Le moment cinétique est conservé

$$Dmv_A = dmv_P$$

$$\Rightarrow \quad v_P^2 = v_A^2 + 2GM\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{D}\right), \quad v_A = \frac{d}{D}v_P$$

$$\Rightarrow \quad v_P^2 = 2GM\frac{D}{d}\frac{1}{D+d}$$

5.5 Ex.: Terre en rotation autour du Soleil

Energie mécanique totale de la Terre

$$E_T = -\frac{GMm}{d} + \frac{1}{2}mv_P^2 = -\frac{GMm}{d} + \frac{1}{2}m2GM\frac{D}{d}\frac{1}{D+d} = -\frac{GMm}{d}\left(1 - \frac{D}{D+d}\right) = -\frac{GMm}{D+d}$$

Energie potentielle effective

$$V_{eff}(r) = \frac{L_S{}^2}{2mr^2} + V(r) = \frac{L_S{}^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{dV_{eff}(r)}{dr} = -\frac{L_S{}^2}{mr^3} + \frac{GMm}{r^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{min} = \frac{L_S{}^2}{GMm^2}$$

$$V_{eff}(r_{min}) = -\frac{m}{2}\left(\frac{GMm}{L_S}\right)^2 = -\frac{m}{2}\left(\frac{GMm}{dmv_p}\right)^2 = -\frac{m}{2}\left(\frac{GM}{d}\right)^2\frac{d(D+d)}{2GMD} = -\frac{GMm}{4}\frac{D+d}{dD} = V_{min}$$

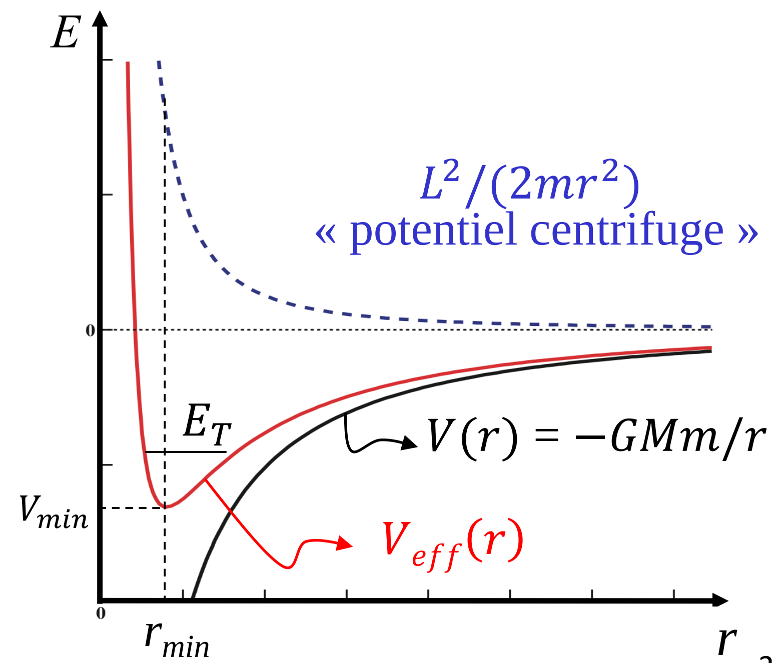
$E_T > V_{min}$? $\quad \Rightarrow \quad -\frac{GMm}{D+d} > -\frac{GMm}{4}\frac{D+d}{dD}$

$$\Downarrow$$

$$-\frac{1}{D+d} > -\frac{D+d}{4dD} \quad \Rightarrow \quad -\frac{4dD}{(D+d)^2} > -1$$

$\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad ||$

$\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad -0.997$



La trajectoire décrite par la Terre est très proche à une circonférence

Si $E = V_{min}$, un seul valeur de r est permis $\Rightarrow$ orbite circulaire